Les immeubles, une théorie de Jacques Tits, prix Abel 2008

Guy Rousseau

LES IMMEUBLES, UNE THÉORIE DE JACQUES TITS, PRIX ABEL 2008

Guy Rousseau

"À l'origine [début des années 50] le but essentiel de la théorie des immeubles était la compréhension des groupes de Lie exceptionnels d'un point de vue géométrique. Le point de départ était l'observation qu'il est possible d'associer à chaque groupe de Lie semi-simple complexe une géométrie bien définie, de telle façon que les propriétés de base des géométries ainsi obtenues et leurs relations mutuelles peuvent se lire aisément sur les diagrammes de Dynkin des groupes correspondants." C'est ainsi que Jacques Tits explique ses motivations initiales pour sa théorie (traduction libre de [**T-80**]). Il ajoute plus loin, essentiellement : ces géométries étant construites à partir de blocs élémentaires de rang deux qui ont des analogues évidents sur tout corps k, il était naturel d'essayer d'associer à tout diagramme de Dynkin une géométrie sur k ; en retour on pourrait extraire du groupe d'automorphismes de cette géométrie un groupe, analogue sur k du groupe de Lie semi-simple complexe associé à ce diagramme de Dynkin. Claude Chevalley réussit (en 1955) la construction de ces groupes par des moyens algébriques. Cela facilita la construction de ces géométries et inversement celles-ci se révélèrent un puissant moyen d'étude de ces groupes de Chevalley. En fait ces géométries polyédriques sont maintenant connues sous le nom d'immeubles, selon la terminologie introduite par N. Bourbaki [**Bi-68**].

J'arrête ici l'exposé des prémices de cette théorie qui, avec d'autres importants travaux de théorie des groupes, a valu à Jacques Tits le prix Abel 2008 (partagé avec J.G. Thompson). Voici un extrait de la motivation du comité pour cette nomination : "un immeuble de Tits [..] encode en termes géométriques la structure algébrique des groupes linéaires. La théorie des immeubles est un principe unificateur dans une palette étonnante d'applications, par exemple dans la classification de groupes algébriques, de groupes de Lie et de groupes finis simples, dans les groupes de Kac- Moody (utilisés par les théoriciens de la physique), dans la géométrie combinatoire (utilisée en informatique), et dans l'étude des phénomènes de rigidité dans les espaces à courbure négative. L'approche géométrique de Tits a été essentielle pour l'étude et la réalisation des groupes finis, dont le Monstre."

Je vais expliquer ci-dessous les grandes lignes de la théorie des immeubles et les développements féconds de celle-ci qu'a apportés Jacques Tits dans des directions variées. On trouvera dans [**Wolf**] une bibliographie extensive des travaux de J. Tits (jusqu'en 2000) et une analyse détaillée (par lui-même) de tous ses travaux jusqu'en 1972. Pour plus d'applications de la théorie on se reportera à [**T-75**] ou [**RS-95**].

Je remercie P.E. Caprace, B. Mű̃hlherr et B. Rémy pour leur relecture attentive de ce texte.

1. L'immeuble d'un espace projectif

Cet immeuble est le prototype qui a servi de modèle à tous les autres [**T-55a**], [**T-55b**], [**T-62a**]. Le langage adopté à l'époque pour ces généralisations était différent, on adopte ici le point de vue des immeubles.

1.1. Le graphe d'incidence. — Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n+1$ sur un corps k. Notons $\mathcal{J} = \mathcal{J}(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V différents de $\{0\}$ et V. Un sous-espace de dimension r est appelé un *sommet de type* r : il est dans $\mathcal{J}_r(V)$. L'ensemble $\mathcal{J}_1(V)$ est donc l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et $\mathcal{J}_r(V)$ est l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ de dimension $r-1$.

Deux éléments de $\mathcal{J}(V)$ sont dits *incidents* s'ils sont distincts et si l'un est contenu dans l'autre. Les points de $\mathcal{J}_1(V) = \mathbb{P}(V)$ incidents à un élément de $\mathcal{J}_r(V)$ sont donc les points du sous-espace projectif correspondant à cet élément.

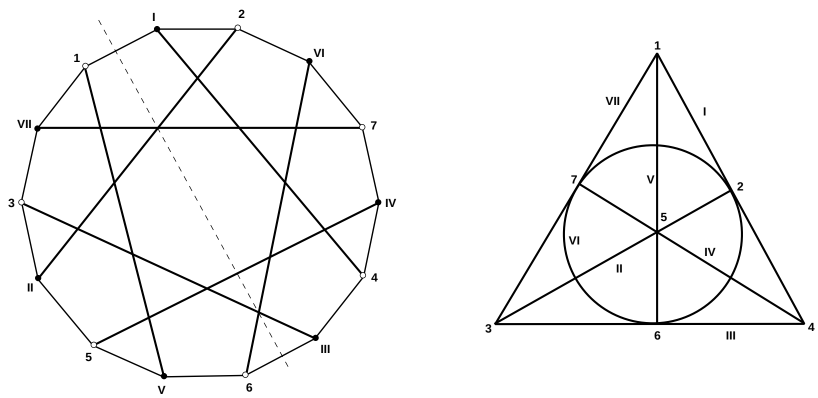
On obtient ainsi une structure de graphe sur $\mathcal{J}(V)$.

1.2. L'exemple du plan projectif sur le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments. — Dans la figure 1 ci-dessous [**T-85**] on a dessiné à droite ce plan projectif qui comporte sept points (numérotés de 1 à 7) et sept droites (numérotées de I à VII y compris la droite VI formée des points 2, 6 et 7). Le graphe $\mathcal{J}$ correspondant est représenté à gauche ; la couleur d'un sommet détermine son type. Chaque sommet est contenu dans trois arêtes.

Un groupe diédral d'ordre 14 respecte la figure de gauche ; cependant les symétries (par exemple celle par rapport à la droite en pointillé) échangent les types : ce sont des "dualités". Le groupe des automorphismes (respectant les types) du graphe $\mathcal{J}$ (indépendamment de la longueur des arêtes) est de cardinal 168, c'est $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Dans cette figure on peut aussi observer les chemins fermés n'empruntant pas deux fois la même arête et de longueur minimale (6 arêtes), on les appelle *appartements* et on constate que deux arêtes sont toujours contenues dans un même appartement.

Figure 1



1.3. Le complexe simplicial. — On appelle *facette* de $\mathcal{J}$ un sous-ensemble de $\mathcal{J}$ formé d'éléments 2 à 2 incidents (c'est donc un drapeau de V) ; son *type* est l'ensemble des types (2 à 2 distincts) de ses éléments. Les facettes maximales ont n éléments (ce sont les drapeaux complets), on les appelle *chambres.* Les facettes à $n-1$ éléments sont appelées *cloisons.*

L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V)$ de ces facettes est un complexe simplicial appelé *immeuble* de $\mathbb{P}(V)$. Ses facettes non vides minimales correspondent aux sommets de $\mathcal{J}$. Ainsi $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux aspects de la même structure.

1.4. Les appartements. — Ils sont en bijection avec les décompositions de V en somme directe de droites : les sommets de l'*appartement* A correspondant à la décomposition $V = D_1 \oplus \cdots \oplus D_{n+1}$ sont tous les sous-espaces vectoriels sommes de certains des D_i ; les facettes de l'appartement A sont les facettes de $\mathcal{I}$ formées de sommets de A. Ainsi un appartement est un sous-complexe simplicial.

Dans l'exemple 1.2 un appartement est donc formé de trois points non alignés et des trois droites qu'ils définissent. On vérifiera la coïncidence avec la définition de 1.2.

Il est facile de vérifier que deux facettes quelconques de $\mathcal{I}$ sont contenues dans un même appartement : c'est une conséquence d'une variante du théorème de Jordan-Hőlder : si $\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ et $\{0\} \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n \subset V$

sont deux drapeaux complets de V, il existe une base $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ de V et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ telles que, pour $1 \leq i \leq n$, V_i ait pour base $\{e_1, \cdots, e_i\}$ et U_i ait pour base $\{e_{\sigma 1}, \cdots, e_{\sigma i}\}$.

Le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui vient d'apparaître est le groupe des automorphismes du complexe simplicial A (il agit par permutation des droites). Il est simplement transitif sur les chambres de A.

1.5. Action du groupe projectif linéaire. — Le groupe $G = \mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/k^*$ agit clairement sur $\mathcal{J}$ en respectant les types et la relation d'incidence. On peut donc considérer son action sur l'immeuble $\mathcal{I}$, elle respecte la structure de complexe simplicial et permute les appartements. Elle est même *fortement transitive i.e.* elle permute transitivement les paires formées d'une chambre dans un appartement.

Le stabilisateur de l'appartement associé à la décomposition $V = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_{n+1}$ est le sous-groupe N de $\mathrm{PGL}(V)$ formé des classes d'éléments dont la matrice dans la base des e_i est monomiale. On a donc un homomorphisme surjectif de N dans $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ dont le noyau T est formé des classes d'automorphismes diagonaux dans cette base.

Les facettes de $\mathcal{I}$, c'est à dire les drapeaux de V, de type fixé $\tau \subset \{1, \cdots, n\}$ sont conjuguées par G. Si $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ est une base ordonnée de V, alors les espaces vectoriels $V_r = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_r$ pour $r \in \tau$ forment une facette σ_τ de type τ. Le fixateur P_{σ_τ} de cette facette est formé des classes d'automorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure par blocs (de taille τ en un sens évident). Ainsi l'ensemble $\mathcal{I}_\tau$ des facettes de type τ s'identifie à G/P_{σ_τ} et $\mathcal{I}$ est réunion disjointe des $\mathcal{I}_\tau$ pour $\tau \subset \{1, \cdots, n\}$. Pour $g, g' \in G$ et $\tau, \tau' \subset \{1, \cdots, n\}$, on a $g\sigma_\tau \subset g'\sigma_{\tau'} \Leftrightarrow gP_{\sigma_\tau} \supset g'P_{\sigma_{\tau'}} \Leftrightarrow gP_{\sigma_\tau}g^{-1} \supset g'P_{\sigma_{\tau'}}g'^{-1}$ (car les groupes P_{σ_τ} sont leurs propres normalisateurs).

Si $\tau = \{1, \cdots, n\}$, les facettes de type τ sont les chambres ; le groupe $B = P_{\sigma_\tau}$ correspond aux matrices triangulaires supérieures. La variante du théorème de Jordan-Hőlder évoquée en 1.4 (appliquée aux V_i ci-dessus et aux $U_i = gV_i$ pour $g \in G$) montre que $G = BNB$ (décomposition de Bruhat).

1.6. Le théorème fondamental de la géométrie projective. — On vient de voir que le groupe $G = \mathrm{PGL}_n$ avec ses sous-groupes P_{σ_τ} détermine l'immeuble $\mathcal{I}$. Inversement on sait que :

Théorème (*cf. e.g.* [**A-57**]). — *Toute bijection d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ (sur un corps k) sur un espace projectif $\mathbb{P}(V')$ de même dimension $n+1 \geq 3$ (sur un corps k') qui conserve l'alignement, détermine un isomorphisme μ de k sur k' et est induite par une bijection $\mu-$semi-linéaire de V sur V'.*

Ainsi l'immeuble $\mathcal{I}(V)$ détermine le corps de base k et son groupe d'automorphismes est produit semi-direct de $\mathrm{PGL}(V)$ par $\mathrm{Aut}(k)$.

C'est cette parfaite illustration du fort lien entre géométries et groupes (décrit dès 1872 par Felix Klein dans son programme d'Erlangen) qui inspire la théorie des immeubles.

1.7. Généralisations. — On peut bien sûr généraliser l'essentiel des constructions précédentes aux espaces projectifs abstraits. Mais surtout après les travaux d'A. Borel et J. Tits [**BlT-65**], il est maintenant facile d'envisager la construction d'un immeuble pour tout groupe algébrique semi-simple :

Le groupe $G = \mathrm{PGL}(V)$ est algébrique semi-simple, T (resp. B) en est un sous-tore déployé maximal (resp. un sous-groupe de Borel ou un sous-groupe parabolique minimal), N est le normalisateur de T et les groupes P_{σ_τ} sont les sous-groupes paraboliques de G contenant B. Si maintenant G est un groupe algébrique semi-simple quelconque, on peut donner un sens aux sous-groupes T, B, N, P_{σ_τ} et donc construire un complexe simplicial avec des appartements comme en 1.5. Mais pour expliquer cette construction, on va d'abord parler un peu de théorie des immeubles.

2. Définition abstraite d'immeuble

Il y a maintenant des références très accessibles pour cette théorie [**Rn-89**], [**Su-95**], [**G-97**] et, le plus complet actuellement, [**AB-08**].

2.1. Groupes de Coxeter. —

Définition. — Un *système de Coxeter* est une paire (W, S) où W est un groupe (*de Coxeter*) engendré par le sous-ensemble fini S, formé d'éléments d'ordre 2 et dont une présentation est fournie par cet ensemble générateur S et les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$ pour $s, s' \in S$, où $m(s, s')$ est l'ordre de ss' (pas de relation si $m(s, s') = \infty$).

La *matrice de Coxeter* de W est $(m(s, s'))_{s,s' \in S}$. On dit que W est *irréductible* si S ne peut être partagé en deux sous-ensembles non vides qui commutent. Le *rang* de W est $|S|$. Le *graphe de Coxeter* de W est le graphe de sommets indexés par S, avec entre deux sommets distincts correspondant à s, s' aucune arête (resp. une arête, une arête double, une arête triple, une arête affectée du coefficient $m(s, s')$) si $m(s, s') = 2$ (resp. 3, 4, 6, un autre entier ou l'infini). Ce graphe est connexe si et seulement si W est irréductible.

Le groupe de permutations $\mathfrak{S}_{n+1}$ engendré par les transpositions $(1, 2), (2, 3), \cdots, (n, n + 1)$ est de Coxeter avec pour graphe •–•–•–···–•–•–• (n sommets). Les groupes de Coxeter de rang 2 sont les groupes diédraux.

H.S.M. Coxeter a étudié et classifié les groupes de Coxeter finis et J. Tits les a étudiés en général, *cf.* [**T-61**] plus largement connu grâce à [**Bi-68**].

2.2. Complexes de Coxeter. — Si $J \subset S$, on peut définir le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par J ; il est de Coxeter. On dit que J est *sphérique* si $W(J)$ est fini. On considère la réunion disjointe $A(W)$ des quotients $W/W(J)$ que l'on ordonne par $wW(J) \leq w'W(J') \Leftrightarrow wW(J) \supset w'W(J')$ (et donc $J \supset J'$). On obtient ainsi un complexe simplicial, dit *complexe de Coxeter de* W. Le rang de $wW(J)$ est $|S \setminus J|$ et son type est J.

Les éléments maximaux (les *chambres*) sont les éléments de W, les éléments maximaux hors chambres (les *cloisons*, de rang $|S|-1$) sont les paires $\{w, ws\}$ pour $w \in W$ et $s \in S$. Ainsi une cloison est contenue dans exactement deux chambres, on dit que le complexe est *mince*. Une *galerie* de longueur n dans $A(W)$ est une suite $C_0, C_1, \cdots, C_n$ de chambres telle que, pour $1 \leq i \leq n$, C_i et C_{i-1} sont minorées par une cloison commune (on dit que C_i et C_{i-1} sont *mitoyennes*). Deux chambres de $A(W)$ peuvent toujours être jointes par une galerie, qui est unique si on précise les types des cloisons traversées. On en déduit que W est le groupe des automorphismes de $A(W)$ respectant les types et qu'il agit (à gauche) simplement transitivement sur les chambres.

Ce complexe est plus facilement compris via sa représentation géométrique construite par J. Tits, *cf.* [**T-61**] ou [**Bi-68**] :

Dans un espace vectoriel réel V de dimension $|S|$, on peut construire des réflexions σ_s par rapport à des hyperplans $\mathrm{Ker}\alpha_s$ (avec $(\alpha_s)_{s\in S}$ libre dans le dual) de telle manière que le groupe engendré par ces réflexions soit isomorphe à W. La *chambre fondamentale* est $C = \{v \in V \mid \alpha_s(v) > 0, \forall s \in S\}$; c'est un cône simplicial dont l'adhérence $\overline{C}$ est réunion disjointe des facettes $C_J = \{v \in V \mid \alpha_s(v) > 0, \forall s \in S \setminus J, \alpha_s(v) = 0, \forall s \in J\}$ pour $J \subset S$. On note $A^c(W) = \mathcal{T} = \bigcup_{w\in W} w\overline{C} \subset V$ le *cône de Tits*. Le résultat remarquable est que $\mathcal{T}$ est un cône convexe, réunion disjointe des *facettes* wC_J (pour $w \in W$ et $J \subset S$), que $\overline{C}$ est un domaine fondamental de l'action de W sur $\mathcal{T}$ et que, pour $J \subset S$, le fixateur de C_J est son stabilisateur et vaut $W(J)$. Ainsi le complexe simplicial $A(W)$ s'identifie à l'ensemble des facettes de $A^c(W)$ ordonné par l'inclusion des adhérences.

Voir ci-dessous figure 2, un exemple de rang 2 avec W diédral d'ordre 12.

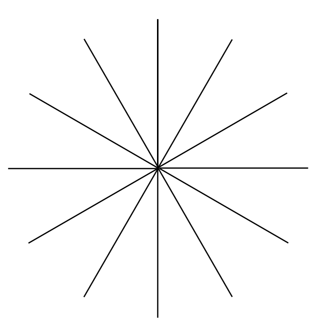


Figure 2

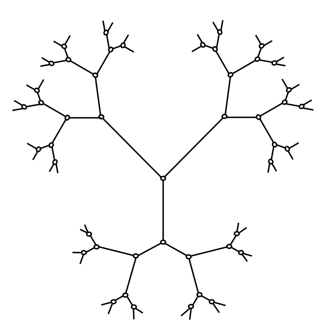


Figure 3

Plus généralement dans la suite, les éléments d'un complexe simplicial seront appelés *facettes* et $F \leq F'$ se lira "F est une face de F'".

Le groupe de Coxeter W est fini si et seulement si $\mathcal{T} = V$. Dans ce cas il est agréable de remplacer $A^c(W)$ par une sphère unité $A^s(W)$ (pour un produit scalaire invariant par W). Par intersection avec $A^s(W)$ des facettes ci-dessus on obtient une décomposition simpliciale de cette sphère.

2.3. Définition des immeubles. — Un *immeuble* (de type W) est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ muni d'un *système d'appartements*, c'est-à-dire d'une collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes appelés *appartements* telle que :

(I0) Chaque appartement est isomorphe au complexe de Coxeter $A(W)$.

(I1) Deux facettes de $\mathcal{I}$ appartiennent à un même appartement.

(I2) Si deux appartements contiennent les facettes F et F', ils sont isomorphes par un isomorphisme fixant F et F' ainsi que toutes leurs faces.

Il résulte de ces axiomes que toute facette de $\mathcal{I}$ est contenue dans une facette maximale appelée *chambre*. On définit comme en 2.2 les *cloisons*, les *types* et les *galeries*.

On supposera toujours les immeubles *épais* : toute cloison est face d'au moins trois chambres. L'immeuble est dit de *type sphérique* si W est fini.

À la figure 3 apparaît l'exemple d'un immeuble de rang 2 (le rang de W qui est ici le groupe diédral infini) sous la forme d'un arbre (sans sommet terminal). Les chambres (resp. les cloisons) sont les arêtes (resp. les sommets) du graphe. Les appartements sont les droites géodésiques.

L'immeuble $\mathcal{I}(V)$ de la section 1 est un immeuble sphérique épais de type $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Si on remplace le système $\mathcal{A}$ par un système plus gros $\mathcal{A}'$ (vérifiant encore (I0) et (I2)), on a essentiellement le même immeuble. Il existe un système maximal d'appartements. Dans le cas sphérique, le système d'appartements est unique.

On peut associer à chaque facette de rang r de $\mathcal{I}$ un simplexe à r sommets et recoller tous ces simplexes selon leurs faces ; on obtient ainsi un espace topologique $|\mathcal{I}|$, *réalisation géométrique* de $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est de type sphérique les appartements de $|\mathcal{I}| = \mathcal{I}^s$ sont des sphères (isomorphes à $A^s(W)$).

2.4. Rétractions. — Considérons une chambre C dans un appartement A de l'immeuble $\mathcal{I}$. Pour toute facette F, il existe un appartement B contenant C et F (axiome (I1)) et un isomorphisme φ de B sur A fixant C et toutes ses faces (axiome (I2)) et donc respectant les types. D'après l'axiome (I2) φF ne dépend pas du choix de B. On pose $\rho_{A,C}(F) = \varphi F$. L'application simpliciale $\rho_{A,C} : \mathcal{I} \to A$ ainsi construite est la *rétraction de centre C sur A*.

Ces rétractions sont des outils très puissants. Montrons par exemple :

Proposition. — *Soient C, C' deux chambres d'un appartement A et $C = C_0, C_1, \cdots, C_n = C'$ une galerie de C à C' dans $\mathcal{I}$ de longueur minimale. Cette galerie est alors entièrement contenue dans A.*

Démonstration. — Sinon il existe $i \geq 1$ avec $C_{i-1} \in A$ et $C_i \notin A$. Notons C'_i la chambre de A telle que C_{i-1}, C_i et C'_i admettent comme face la même cloison et $\rho = \rho_{A,C'_i}$. Il est clair que $\rho C_i = C_{i-1}$. On a donc une galerie $C = \rho C_0, \cdots, \rho C_i = C_i = \rho C_{i+1}, \cdots, \rho C_n = C'$ de C à C' dans A et de longueur $n-1$; c'est absurde.

□

2.5. Étoiles. — L'étoile F^* d'une facette F de $\mathcal{I}$ est le complexe simplicial formé des facettes dont F est une face. Les intersections de F^* avec les appartements de $\mathcal{I}$ contenant F définissent des appartements dans F^*. On munit ainsi F^* d'une structure d'immeuble de type $W(J)$ où J est le type de F.

Ce résultat permet des raisonnements par récurrence sur le rang.

Pour l'immeuble $\mathcal{I}(V)$ de la section 1 le lecteur vérifiera que l'étoile de la facette associée à un drapeau est le produit des immeubles associés aux espaces vectoriels quotients successifs de ce drapeau.

2.6. Groupes d'automorphismes. — Considérons un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{I}$ respectant les types et $\mathcal{A}$. Soient C une chambre dans un appartement A. On note B le fixateur de C dans G et N (resp. $T = B \cap N$) le stabilisateur (resp. le fixateur) de A dans G.

On dit que le groupe G est *fortement transitif* s'il agit transitivement sur les paires formées d'une chambre dans un appartement. Alors N agit transitivement sur les chambres de A. Comme A est isomorphe à $A(W)$ on obtient donc un isomorphisme de N/T sur W. Plus précisément (G, B, N, S) est un système de Tits :

Définition. — Un *système de Tits* est un quadruplet (G, B, N, S) où G est un groupe, B et N deux sous-groupes et S une partie de $W = N/(B \cap N)$, satisfaisant aux quatre axiomes suivants (pour $w \in W$, on note $\tilde{w}$ un représentant de w dans N) :

(T1) B et N engendrent G et $B \cap N$ est distingué dans N.
(T2) S est formé d'éléments d'ordre 2 et engendre W.
(T3) Pour tous $w \in W$ et $s \in S$, on a : $\tilde{s}B\tilde{w} \subset B\tilde{w}B \cup B\tilde{s}\tilde{w}B$.
(T4) Pour tout $s \in S$ on a : $\tilde{s}B\tilde{s} \not\subset B$.

Le groupe B est le *sous-groupe de Borel* et W le *groupe de Weyl* du système.

2.7. L'immeuble d'un système de Tits. — Si (G, B, N, S) est un système de Tits, alors (W, S) est un système de Coxeter et on a la *décomposition de Bruhat* $G = BNB$, plus précisément G est réunion disjointe des doubles classes $B\tilde{w}B$ pour $w \in W$.

Pour $J \subset S$, $P_J = \cup_{w \in W(J)} B\tilde{w}B$ est un sous-groupe de G contenant B dit *parabolique*. On obtient ainsi tous les sous-groupes de G contenant B.

Par la construction esquissée en 1.7, on obtient un immeuble $\mathcal{I}$ sur lequel G agit fortement transitivement en conservant les types.

2.8. Historique. — L'élaboration de ces notions s'est faite dans un ordre essentiellement inverse de l'exposé dogmatique précédent. Au début F. Bruhat a découvert sa décomposition dans les groupes de Lie simples classiques [**Bt-54**]. Ensuite Harish-Chandra et C. Chevalley ont étendu ce résultat, puis J. Tits est parvenu à sa version axiomatisée des décompositions de Bruhat, les systèmes de Tits (selon le nom attribué par N. Bourbaki [**Bi-68**], J. Tits parlait de $BN-$paires) *cf.* [**T-62b**], [**T-63b**] et [**T-64**]. Les premiers exposés de la notion d'immeuble apparaissent dans [**T-63a**] et [**T-65**] (sous le nom de complexe structuré), puis avec plus de détails dans [**T-74**].

Cette notion de système de Tits, indissociable de celle d'immeuble, est particulièrement souple : on verra ci-dessous qu'elle s'est appliquée ensuite efficacement à de nouvelles situations. Elle est aussi assez forte : un groupe avec système de Tits est "presque" simple [**T-64**] [**Bi-68**, IV, 2.7], ceci fournit une preuve unifiée de la simplicité des groupes simples finis de type de Lie.

3. Immeubles de type sphérique

3.1. L'immeuble de Tits d'un groupe semi-simple. — Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps k, on peut, selon la méthode esquissée en 1.7, lui associer un immeuble $\mathcal{I}(G, k)$ sur lequel il agit. C'est son *immeuble de Tits*, il est de type sphérique, car le groupe de Weyl $W = N/T$ est fini. En fait les principaux résultats d'A. Borel et J. Tits [**BlT-65**] sur la structure d'un groupe algébrique semi-simple G se résument en l'existence d'un système de Tits (G, B, N, S) et ce système fournit l'immeuble. Si le groupe G est déployé, les travaux de Chevalley donnent ce résultat assez facilement ; on peut déduire le cas général par descente galoisienne sur l'immeuble.

3.2. Applications. — Je ne vais en citer que trois.

1) Si G est de rang relatif r sur k, la réalisation géométrique $\mathcal{I}^s(G, k) = |\mathcal{I}(G, k)|$ est homotope à un bouquet de $(r-1)-$sphères (une par appartement contenant une chambre donnée). Ainsi G agit sur l'homologie $H_{r-1}(|\mathcal{I}(G, k)|)$. C'est particulièrement intéressant si k est fini ; alors $\mathcal{I}^s(G, k)$ est fini et la

représentation précédente est de dimension finie : c'est la représentation de Steinberg, bien connue des théoriciens des groupes finis, *cf.* [**CLT-80**].

2) Soient G un groupe de Lie semi-simple et X son espace riemannien symétrique. Le choix le plus naturel pour l'espace à l'infini de X est souvent très lié à un immeuble sphérique [**T-75**].

Ainsi, pour G défini sur $\mathbb{Q}$, A. Borel et J.P. Serre ajoutent à X une frontière $\partial X = \overline{X} \backslash X$ réunion disjointe de morceaux contractiles indexés par les $\mathbb{Q}-$sous-groupes paraboliques de G *i.e.* par $\mathcal{I}(G, \mathbb{Q})$. Ce bord ∂X a le type d'homotopie de $\mathcal{I}^s(G, k)$ et le quotient de $\overline{X}$ par un sous-groupe arithmétique Γ de G est compact. Ceci permet en particulier de calculer la dimension cohomologique de Γ [**BS-73**].

On peut définir la *frontière de Tits* ou *bord visuel* de X comme quotient de l'ensemble des demi-droites par la relation "être à distance mutuelle bornée". C'est un immeuble sphérique (avec une topologie spéciale) *cf. e.g.* [**KL-97**].

3) Soient X un immeuble de type sphérique et Y un sous-ensemble fermé, convexe de $|X|$ ne contenant pas deux points opposés (dans une sphère $|A|$ pour un appartement A). Alors J. Tits a suggéré en 1962 que le groupe des automorphismes de X stabilisant Y a un point fixe dans Y. Cette conjecture, popularisée par D. Mumford [**Md-65**], est connue comme conjecture du centre de Tits ; elle est résolue pour les immeubles classiques [**MT-06**] et le cas utilisé par D. Mumford. Voir [**Se-04**] pour des applications intéressantes.

3.3. Généralisations. — On peut construire d'autres immeubles de type sphérique analogues à ces immeubles de Tits des groupes semi-simples.

On a d'abord les immeubles des groupes classiques non algébriques. Dans la section 1 par exemple on peut considérer le cas où k est un corps gauche de dimension infinie sur son centre. On peut aussi envisager le groupe orthogonal d'une forme quadratique d'indice fini sur un espace vectoriel de dimension infinie.

Il existe des groupes (non algébriques) obtenus par torsion de groupes algébriques semi-simples (en caractéristique positive) : les groupes de Ree, de Suzuki ou de Tits. On peut construire leur immeuble par descente galoisienne comme pour les groupes algébriques. Sur un corps non parfait il y a aussi des groupes "mixtes" plus compliqués.

Les groupes finis simples généralisant les groupes algébriques simples finis, on peut chercher à leur associer des géométries ressemblant aux immeubles. Voir [**T-80**] et des articles de l'ouvrage contenant [**T-86**].

3.4. Classification des immeubles de type sphérique. — Elle est accomplie dans l'exposé fondamental [**T-74**] datant essentiellement de 1968, pour les immeubles de type irréductible (différent de H_3 ou H_4) et de rang au moins égal à trois. Plus précisément deux problèmes sont résolus : déterminer tous ces immeubles à isomorphisme près (ils sont en gros comme décrit en 3.3) et déterminer leurs groupes d'automorphismes. Ainsi ce résultat est la généralisation du théorème fondamental de la géométrie projective.

La classification des immeubles finis est plus simple : *e.g.* un corps fini est commutatif et parfait et il n'y a pas d'immeuble fini de type H_3 ou H_4 ; voir [**Rn-89**] ;

Il n'est pas raisonnable d'essayer de classifier tous les immeubles de type sphérique et de rang deux (les polygônes généralisés), sauf pour les immeubles vérifiant la condition de "Moufang" : ils sont associés à des systèmes de Tits "décomposés". Cette classification a été achevée récemment par J. Tits et R. Weiss. Ces immeubles sont les pierres élémentaires des immeubles de rang plus élevé, selon le procédé de construction développé par M. Ronan et J. Tits [**RT-87**]. On peut donc en déduire une preuve simplifiée de la classification *cf.* [**TW-03**]. Un exposé assez succinct mais complet de la théorie des immeubles de type sphérique se trouve dans [**W-03**] ; la classification y est expliquée.

La détermination des ensembles de Moufang (ou immeubles de Moufang de rang 1) est encore en cours, voir [**T-00**].

4. Immeubles de type affine

4.1. Groupes semi-simples sur un corps ultramétrique. — Soit G un groupe algébrique semi-simple sur un corps K complet pour une valuation discrète ω. Pour $G = \mathrm{PGL}_n$, O. Goldman et N. Iwahori [**GI-63**] construisent un espace analogue à l'espace symétrique du cas réel. Pour G déployé simplement connexe, F. Bruhat [**Bt-64**] construit des sous-groupes compacts maximaux dans G, puis N. Iwahori et H. Matsumoto [**IM-65**] exhibent un système de Tits de groupe de Weyl infini. F. Bruhat et J. Tits [**BtT-66**], [**BtT-72**], [**BtT-84a**], [**BtT-84b**], [**BtT-87a**], [**BtT-87b**] ont alors montré l'existence d'un système de Tits (et donc d'un immeuble $\mathcal{I}(G, K, \omega)$ sur lequel G agit) dans tout groupe semi-simple simplement connexe G, si le corps résiduel de K est parfait.

4.2. Appartements affines. — L'appartement d'un immeuble affine est réalisé géométriquement comme un espace affine euclidien A^a muni d'un ensemble infini discret d'hyperplans (les *murs*) tel que le groupe W engendré par les réflexions orthogonales par rapport à ces murs stabilise cet ensemble de murs. Le groupe W est alors de Coxeter [**Bi-68**]. Dans la figure 4 ci-dessous sont représentés les 3 cas irréductibles de dimension 2 (et rang 3).

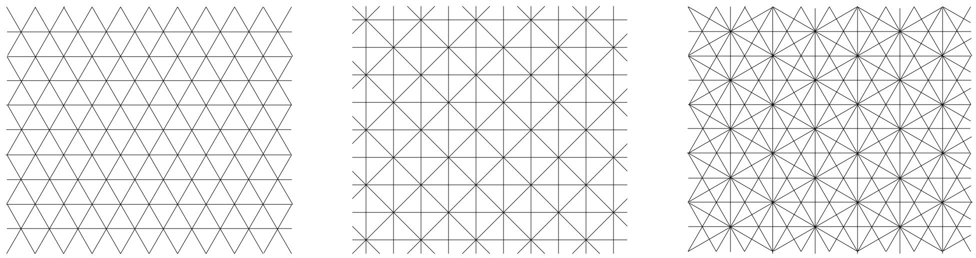


Figure 4

Les *chambres* sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des murs et on définit facilement des facettes, que l'on ordonne par l'inclusion des adhérences. Si W est irréductible, on obtient ainsi le complexe simplicial $A(W)$ et $A^a = A^a(W)$ est la réalisation géométrique $|A(W)|$. En fait on peut alors plonger $A^a(W)$ comme hyperplan affine dans $A^c(W)$ et les facettes se correspondent par intersection, *cf. e.g.* [**Ru-08**].

Le groupe de Weyl W est le groupe de Weyl affine d'un système de racines, c'est le produit semi-direct d'un groupe fini et d'un réseau de translations de $A^a(W)$. Dans le cas d'un appartement d'immeuble de groupe semi-simple, ce système de racines est très lié au système de racines relatif de ce groupe.

4.3. Métrique sur un immeuble affine. — Soit $\mathcal{I}$ un immeuble de type W, groupe de Coxeter affine *i.e.* construit comme en 4.2 ci-dessus (avec W irréductible pour simplifier). La réalisation géométrique $\mathcal{I}^a = |\mathcal{I}|$ est réunion d'appartements isomorphes à $A^a(W)$; on dit que c'est un *immeuble affine*. La distance euclidienne des appartements s'étend en une distance d sur $\mathcal{I}^a$ et cet espace métrique est complet.

Si W est irréductible de rang 2 c'est un groupe diédral infini et $A^a(W)$ est une droite réelle. L'immeuble $\mathcal{I}^a$ est alors un arbre. La figure 3 de 2.2 représente l'immeuble $\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ quand le corps résiduel de K a deux éléments.

Les rétractions de $\mathcal{I}$ sur un appartement A de centre une chambre C, peuvent être définies sur la réalisation géométrique $\mathcal{I}^a$. Elles diminuent les distances mais conservent les distances à un point de la chambre C. Ceci permet de montrer la propriété suivante de courbure négative [**BtT-72**, 3.2].

(CN) Soient x, y, z trois points de $\mathcal{I}^a$ et m le milieu du segment $[y, z]$ (dans un/tout appartement contenant y et z) alors $d(x, m)$ est au plus égal à la distance de $\sigma(x)$ à m' pour un plongement isométrique σ de $\{x, y, z\}$ dans un plan euclidien, avec m' milieu du segment $[\sigma x, \sigma y]$.

4.4. Sous-groupes bornés maximaux. — F. Bruhat et J. Tits [**BtT-72**] montrent le lemme de point fixe suivant :

Lemme. — *Dans un espace métrique complet géodésique vérifiant la condition (CN) ci-dessus, tout groupe borné (i.e. stabilisant une partie bornée) d'isométries a un point fixe.*

Ainsi les sous-groupes bornés maximaux du groupe des isométries de cet espace correspondent bijectivement à certains de ses points. F. Bruhat et J. Tits en déduisent la classification des sous-groupes compacts maximaux d'un groupe semi-simple simplement connexe G sur un corps local (différent de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) ; ils correspondent bijectivement aux sommets de l'immeuble affine. Il est intéressant de noter que dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le groupe G agit sur son espace riemannien symétrique qui vérifie aussi (CN) ; ceci permet de redémontrer la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de G.

4.5. Exemples. — En s'inspirant de [**GI-63**] on peut définir une réalisation concrète de l'immeuble de $\mathrm{SL}_n(K)$ pour un corps local K. C'est un espace de normes sur K^n à homothéties près. Ses sommets sont les classes de réseaux de K^n à homothétie près. Pour $n = 2$, cet arbre est construit dans [**Se-77**] voir la figure 3 de 2.2. Le cas général est traité par F. Bruhat et J.Tits [**BtT-84b**] ; il est repris dans un contexte un peu différent dans [**P-00**].

Des réalisations analogues pour les autres groupes classiques apparaissent dans [**BtT-87a**].

4.6. Compactifications. — Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local K, son immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{I}^a(G, K, \omega)$ est localement compact. On peut le compactifier de plusieurs manières comme pour les espaces symétriques *cf.* 3.2 2). Expliquons-en une :

Si $\mathcal{I}^a$ est un immeuble affine, son bord visuel $\partial\mathcal{I}^a$ est défini comme en 3.2 2) ; on associe donc à chaque appartement sa sphère à l'infini. Ainsi $\partial\mathcal{I}^a$ est un immeuble sphérique (avec une topologie spéciale). Si $\mathcal{I}^a$ est localement compact, $\mathcal{I}^a \cup \partial\mathcal{I}^a$ est compact. Quand $\mathcal{I}^a = \mathcal{I}^a(G, K, \omega)$, $\partial\mathcal{I}^a$ est l'immeuble de Tits $\mathcal{I}^s(G, K)$ convenablement retopologisé.

Pour $G = \mathrm{SL}_2$ et K complet $\partial\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ est l'ensemble des bouts de l'arbre $\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ identifié à l'immeuble sphérique $\mathcal{I}^s(\mathrm{SL}_2, K)$, c'est-à-dire à l'espace projectif $\mathbb{P}_1(K)$.

Une autre compactification (dite polygonale) généralise l'une des compactifications par I. Satake des espaces riemanniens symétriques *cf.* [**L-96**].

4.7. Immeubles affines denses. — Pour associer un immeuble à tout groupe algébrique semi-simple sur un corps ultramétrique, même pour une valuation réelle non discrète, F. Bruhat et J. Tits [**BtT-72**] élargissent la notion d'immeuble affine. Ils considèrent le cas où le système d'hyperplans de 4.2 n'est pas discret. Alors W n'est plus de Coxeter, il contient un sous-groupe non discret de translations de l'appartement affine $A^a(W)$. On obtient ainsi un "immeuble" $\mathcal{I}^a$ réunion d'appartements affines. Il y a encore une métrique mais l'immeuble n'est plus forcément complet. On peut encore définir un immeuble sphérique à l'infini.

Une définition abstraite de ce genre d'immeuble est donnée par J. Tits [**T-86**], voir aussi [**P-00**] ou [**Ru-08**].

4.8. Classification. — La présence d'un immeuble sphérique à l'infini d'un immeuble affine et la classification préexistante des immeubles sphériques (irréductibles de rang ≥ 3) sont les points de départ de la classification par J. Tits des immeubles affines irréductibles de dimension (= dimension des appartements) au moins 3 [**T-86**]. Il se place dans le cadre général des immeubles affines éventuellement denses (*cf.* 4.7) et montre essentiellement que ces immeubles sont des immeubles de Bruhat-Tits $\mathcal{I}^a(G, K, \omega)$, ou des analogues pour G un groupe classique non algébrique ou une version tordue des précédents *cf.* 3.3.

On trouvera un exposé détaillé de la théorie des immeubles affines (non denses) et de leur classification dans le livre de R. Weiss [**W-09**].

5. Développements récents

5.1. Réalisation métrique d'un immeuble quelconque. — Les immeubles affines sont des exemples intéressants d'espaces à courbure négative ou nulle selon la définition de M. Gromov (prix Abel 2009 !). Ils sont "CAT(0)" : c'est essentiellement équivalent à la condition (CN) de 4.3.

On peut munir un immeuble sphérique $\mathcal{I}^s$ d'une métrique identifiant chaque appartement à une sphère euclidienne de rayon 1. On obtient ainsi un espace métrique CAT(1).

Pour un immeuble $\mathcal{I}$ plus général la réalisation géométrique $|\mathcal{I}|$ n'a pas de bonne propriété métrique. Si $\mathcal{I}$ n'a pas de facteur de type sphérique, une nouvelle réalisation géométrique $\mathcal{I}^m$ de $\mathcal{I}$ munie d'une métrique CAT(0) a été construite par M. Davis [**D-98**] (et simultanément par J. Tits, non publié) à partir des travaux de G. Moussong [**Mg-88**]. Dans $\mathcal{I}^m$ seules apparaissent les facettes sphériques de $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est affine on a $\mathcal{I}^m = \mathcal{I}$. Cette réalisation permet d'utiliser le lemme de point fixe de 4.4, par exemple pour montrer qu'un groupe fini agissant sur un immeuble irréductible non de type sphérique stabilise une facette sphérique.

5.2. Le point de vue "moderne" sur les immeubles. — Ce nouveau point de vue a été introduit par J. Tits en 1981 dans [**T-81**] et précisé dans [**T-92**]. Dans un immeuble (simplicial) $\mathcal{I}$ associé à un système de Tits (G, B, N, S), l'ensemble $\mathcal{C}$ des chambres est égal à G/B. Pour gB et hB dans

$\mathcal{C}$ on pose $\delta(gB, hB) = w \in W$ si $g^{-1}h \in B\tilde{w}B$ (décomposition de Bruhat). On obtient ainsi une application $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$.

Pour un système de Coxeter (W, S), on peut donc introduire la définition :

Définition. — Un *immeuble* de type (W, S) est un ensemble $\mathcal{C}$ (de chambres) muni d'une application $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$ (la $W-$*distance*) vérifiant pour tous $x, y, z \in \mathcal{C}$:

(IM1) $\delta(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

(IM2) Si $\delta(x, y) = w \in W$ et $\delta(y, z) = s \in S$, alors $\delta(x, z) \in \{w, sw\}$. Si de plus la longueur $\ell(ws)$ de ws (par rapport à S) est plus grande que celle de w, alors $\delta(x, z) = ws$.

(IM3) Si $\delta(x, y) = w \in W$ et $s \in S$, il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $\delta(y, z) = s$ et $\delta(x, z) = ws$.

Cette définition est équivalente à la définition simpliciale ("démodée") expliquée ci-dessus : une facette est remplacée par un ensemble de chambres (moralement les chambres qui la contiennent) appelé résidu. Plus précisément un *résidu de type* $J \subset S$ est une classe d'équivalence pour la relation $x \sim y \Leftrightarrow \delta(x, y) \in W(J)$. Un appartement est une partie de $\mathcal{C}$ qui est $W-$isométrique à W (muni de la $W-$distance $\delta(w, w') = w^{-1}w'$) : on ne parle que du système complet d'appartements. Cette nouvelle définition s'avère plus souple que la précédente et se généralise au cas ci-dessous des immeubles jumelés (mais pas aux immeubles denses de 4.7).

Les livres de M. Ronan [**Rn-89**] et R. Weiss [**W-03**], [**W-09**] sont entièrement écrits dans ce langage. Celui de P. Abramenko et K. Brown [**AB-08**] présente les deux points de vue.

5.3. Les groupes de Kac-Moody et leurs immeubles jumelés. — Les groupes de Kac-Moody (déployés) généralisent les groupes algébriques semi-simples déployés (groupes de Chevalley). Un exemple particulièrement intéressant et utile est constitué des groupes de lacets : $G(K) = G^\circ(K[t, t^{-1}])$ où G° est un groupe algébrique semi-simple sur le corps K

Sur chaque corps K on peut définir de nombreux groupes de Kac-Moody (déployés) et ces groupes sont munis de systèmes de Tits très généraux : tout graphe avec des arêtes simples, doubles, triples ou étiquetées par ∞ apparaît comme graphe de Coxeter du groupe de Weyl d'un tel système. Mais il y a au moins deux classes de conjugaison de sous-groupes de Borel : deux sous-groupes de Borel opposés (B^+ et B^-) ne sont pas conjugués. On a donc en fait deux systèmes de Tits (G, B^+, N, S) et (G, B^-, N, S) avec deux décompositions de Bruhat $G = B^+NB^+ = B^-NB^-$, mais aussi une décomposition de Birkhoff $G = B^+NB^- = B^-NB^+$, *cf.* [**T-87**].

Cette structure de G peut se traduire par un système de Tits "jumelé" (G, B^+, B^-, N, S) *cf.* [**T-92**]. Du côté immeuble on en a en fait deux immeubles, $\mathcal{I}^+$ associé à (G, B^+, N, S) et $\mathcal{I}^-$ associé à (G, B^-, N, S). Si le groupe de Kac-Moody est un groupe de lacets $G^\circ(K[t, t^{-1}])$, les deux immeubles $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ sont les immeubles de Bruhat-Tits de G° sur les corps ultramétriques $K(\!(t)\!)$ et $K(\!(t^{-1})\!)$.

La décomposition de Birkhoff se traduit par une *codistance* $\delta^* : (\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-) \cup (\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+) \to W$ (où $\mathcal{C}^\pm$ est l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}^\pm$) défini par $\delta^*(gB^\epsilon, hB^{-\epsilon}) = w$ si $g^{-1}h \in B^\epsilon \tilde{w} B^{-\epsilon}$. Ainsi, selon la théorie développée par M. Ronan et J. Tits, on obtient un jumelage des deux immeubles :

5.4. Jumelages. —

Définition (*cf.* [**T-92**]). — Un *jumelage* de deux immeubles de type (W, S) $(\mathcal{C}^+, \delta_+)$ et $(\mathcal{C}^-, \delta_-)$ (au sens de 5.2) est une application $\delta^* : (\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-) \cup (\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+) \to W$ telle que, pour $x \in \mathcal{C}_\epsilon$, $y \in \mathcal{C}_{-\epsilon}$:

(J1) $\delta^*(y, x) = \delta^*(x, y)^{-1}$.

(J2) Si $z \in \mathcal{C}^{-\epsilon}$, $\delta^*(x, y) = w \in W$, $\delta_{-\epsilon}(y, z) = s \in S$ et si $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, alors $\delta^*(x, z) = ws$.

(J3) Si $\delta^*(x, y) = w \in W$ et $s \in S$, il existe $z \in \mathcal{C}^{-\epsilon}$ tel que $\delta_{-\epsilon}(y, z) = s$ et $\delta^*(x, z) = ws$.

Si W est le groupe diédral infini, des immeubles jumelés de type (W, S) sont des arbres jumelés. On peut définir cette notion par une codistance entre sommets de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ *cf.* [**RT-94**].

5.5. Immeubles jumelés et groupes de type Kac-Moody. — Si G est un groupe de Kac-Moody non déployé (mais en fait "presque-déployé") sur un corps K, on peut, par descente galoisienne sur les immeubles jumelés de G sur une extension déployante, définir des immeubles jumelés pour G sur K et un système de Tits jumelé *cf.* [**Ry-02**].

La classification des immeubles jumelés a été entamée par J. Tits [**T-92**] et accomplie par B. Műhlherr *cf.* [**Mr-02**]. Cela nécessite des hypothèses de rang assez grand ou de Moufang (comme pour les cas sphérique ou affine) mais aussi d'autres hypothèses : il faut en particulier supposer que W est $2-$sphérique *i.e.* que sa matrice de Coxeter n'a pas de coefficient infini. On trouve bien sûr les immeubles des groupes de Kac-Moody presque déployés et aussi des torsions de ces groupes ou des groupes analogues. Au cours de ces torsions il faut considérer des systèmes de Coxeter (W, S) avec S infini (contrairement à nos hypothèses).

La généralisation des immeubles de Bruhat-Tits au cas des groupes de Kac-Moody sur un corps local pose quelques difficultés [**Ru-06**] [**GR-08**].

Un groupe de Kac-Moody sur un corps fini (assez grand) est un réseau dans le produit de certains groupes fermés d'automorphismes de ses deux immeubles. Pour les groupes de lacets on retrouve ainsi des réseaux de groupes semi-simples sur des corps locaux d'égale caractéristique p. Le cas général est à la fois semblable et différent par rapport à ce cas particulier *cf.* [**CR-09**].

Références

[AB-08] Peter Abramenko et Kenneth S. Brown, *Buildings : theory and applications*, Graduate texts in Math. **248** (Springer Verlag, Berlin, 2008).

[A-57] Emil Artin, *Geometric algebra*, (Interscience, New York, 1957), *cf. Algèbre géométrique*, (Gauthier-Villars, Paris, 1967).

[BS-73] Armand Borel et Jean-Pierre Serre, Corners and arithmetic groups, *Comm. Math. Helv.* **48** (1973), 436-491.

[BlT-65] Armand Borel et Jacques Tits, Groupes réductifs, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), 55-151.

[Bi-68] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV,V et VI*, (Hermann, Paris, 1968).

[Bt-54] François Bruhat, Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **238** (1954), 437-439.

[Bt-64] François Bruhat, Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps $\mathfrak{p}-$adique, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **23** (1964), 46-74.

[BtT-66] François Bruhat et Jacques Tits, BN-paires de type affine et données radicielles affines, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A* **263** (1966), 598-601 ; voir aussi pages 766-768, 822-825 et 867-869.

[BtT-72] François Bruhat et Jacques Tits, Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **41** (1972), 5-251.

[BtT-84a] François Bruhat et Jacques Tits, Groupes réductifs sur un corps local II, Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **60** (1984), 5-184.

[BtT-84b] François Bruhat et Jacques Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, *Bull. Soc. Math. France* **112** (1984), 259-301. Erratum in [**BtT-87a**].

[BtT-87a] François Bruhat et Jacques Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Deuxième partie : Groupes unitaires, *Bull. Soc. Math. France* **115** (1987), 141-195.

[BtT-87b] François Bruhat et Jacques Tits, Groupes algébriques sur un corps local III, Compléments et applications à la cohomologie galoisienne, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), 671-698.

[CR-09] Pierre-Emmanuel Caprace et Bertrand Rémy, Simplicity and superrigidity of twin building lattices, *Inventiones Math.* **176** (2009), 169-221.

[CLT-80] Charles W. CURTIS, Gustav LEHRER et Jacques TITS, Spherical buildings and the character of the Steinberg representation, *Inventiones Math.* **58** (1980), 201-210.

[D-98] Michael W. DAVIS, Buildings are CAT(0), in *Geometry and cohomology in group theory, Durham (1994)*, P. Kropholler, G. Niblo et R. Stőhr éditeurs, London Math. Soc. lecture note **252** (Cambridge U. Press, Cambridge, 1998), 108-123.

[G-97] Paul GARRETT, *Buildings and classical groups*, (Chapman and Hall, London, 1997).

[GR-08] Stéphane GAUSSENT et Guy ROUSSEAU, Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths, *Annales Inst. Fourier* **58** (2008), 2605-2657.

[GI-63] Oscar GOLDMAN et Nagayoshi IWAHORI, The space of $\mathfrak{p}-$adic norms, *Acta Math.* **109** (1963), 137-177.

[IM-65] Nagayoshi IWAHORI et Hideya MATSUMOTO, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of $\mathfrak{p}-$adic Chevalley groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **25** (1965), 5-48.

[KL-97] Bruce KLEINER et Bernhard LEEB, Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and euclidean buildings, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **86** (1997), 115-197.

[L-96] Erasmus LANDVOGT, *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture notes in Math. **1619** (Springer, Berlin, 1996).

[Mg-88] Gabor MOUSSONG, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph. D. thesis, Ohio State University (1988).

[Mr-02] Bernhard MŰHLHERR, Twin buildings, in *Tits buildings and the model theory of groups, Wűrzburg (2000)*, K. Tent éditrice, London Math. Soc. lecture note **291** (Cambridge U. Press, Cambridge, 2002), 103-117.

[MT-06] Bernhard MŰHLHERR et Jacques TITS, The center conjecture for non exceptional buildings, *J. of Algebra* **300** (2006), 687-706.

[Md-65] David MUMFORD, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der math. **34** (Springer, Berlin, 1965). Seconde édition avec J. Fogarty, 1982. Troisième édition avec J. Fogarty et F. Kirwan, 1994.

[P-00] Anne PARREAU, Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries, *Contemporary Math.* **262** (2000), 263-302.

[Ry-02] Bertrand RÉMY, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque **277** (2002).

[RS-95] Jűrgen ROHLFS et Tonny A. SPRINGER, Applications of buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, (Elsevier, Amsterdam, 1995), 1085-1114.

[Rn-89] Mark A. RONAN, *Lectures on buildings*, Perspectives in Math. **7** (Academic Press, New York, 1989).

[RT-87] Mark A. RONAN et Jacques TITS, Building buildings, *Math. Annalen* **278** (1987), 291-306.

[RT-94] Mark A. RONAN et Jacques TITS, Twin trees I , *Invent. Math.* **116** (1994), 463-479.

[Ru-06] Guy Rousseau, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, immeubles microaffines, *Compositio Mathematica* **142** (2006), 501-528.

[Ru-08] Guy Rousseau, Euclidean buildings, in "Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité, Grenoble, 2004", L. Bessières, A. Parreau et B. Rémy éditeurs, *Séminaires et Congrès* **18** (Soc. Math. France. 2008), 77-116.

[Su-95] Rudolf Scharlau, Buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, (Elsevier, Amsterdam, 1995), 477-645.

[Se-77] Jean-Pierre Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque **46** (1977). *cf. Trees*, Springer (1980).

[Se-04] Jean-Pierre Serre, Complète réductibilité , exposé 932 in *Séminaire Bourbaki 2003/2004*, Astérisque **299** (2005), 195-217.

[T-55a] Jacques Tits, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mémoire Acad. Roy. Belg.* **29** (3) (1955), 268 pp.

[T-55b] Jacques Tits, Groupes semi-simples complexes et géométrie projective, exposé 112 in *Séminaire Bourbaki* **3***, années 1954/55-1955/56*, Soc. Math. France (1996), 115-125.

[T-61] Jacques Tits, *Groupes et géométries de Coxeter*, preprint Inst. Hautes Études Sci. (1961), in **[Wolf]**

[T-62a] Jacques Tits, Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, in *Algebraical and topological foundations of geometry, Utrecht (1959)*, H. Freundenthal éditeur, (Pergamon Press, Oxford, 1962), 175-192.

[T-62b] Jacques Tits, Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A* **24** (1962), 2910-2912.

[T-63a] Jacques Tits, Géométries polyédriques et groupes simples, in *Atti della* 2^a *reunione del Groupement des mathématiciens d'expression latine, Firenze (1961)*, Edizioni Cremonese, Roma (1963), 66-88.

[T-63b] Jacques Tits, Groupes simples et géométries associées, in *Proc. Intern. Congress Math., Stockholm (1962)*, (1963), 197-221.

[T-64] Jacques Tits, Algebraic and abstract simple groups, *Annals of Math.* **80** (1964), 313-329.

[T-65] Jacques Tits, Structures et groupes de Weyl, exposé 288 in *Séminaire Bourbaki* **9***, années 1964/65-1965/66*, Soc. Math. France (1996), 169-183.

[T-74] Jacques Tits, *Buildings of spherical type and finite BN pairs*, Lecture notes in Math. **386** (Springer, Berlin, 1974). Seconde édition (1986).

[T-75] Jacques Tits, On buildings and their applications, in *Proc. Int. Congress Math., Vancouver (1974)*, volume 1 (1975), 209-220.

[T-80] Jacques Tits, Buildings and Buekenhout geometries, in *Finite simple groups II , Durham (1978)*, Éditeur M.J. Collins, Academic Press (1980), 309-320.

[T-81] Jacques Tits, A local approach to buildings, in *The geometric vein. The Coxeter Festschrift*, C. Davis, B. Grűnbaum et F.A. Sherk éditeurs, Springer (1981), 519-547.

[T-85] Jacques Tits, Symétries, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Gén. Vie Sci.* **2** (1985), 13-25.

[T-86] Jacques Tits, Immeubles de type affine, in *Buildings and the geometry of diagrams, Como (1984)*, L.A. Rosati éditeur, Lecture notes in Math. **1181** (Springer, Berlin, 1986), 159-190.

[T-87] Jacques Tits, Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, *J. of Algebra* **105** (1987), 542-573.

[T-92] Jacques Tits, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, in *Groups combinatorics and geometry (Durham, 1990)*, M. Liebeck et J. Saxl éditeurs, London Math. Soc. lecture note **165**, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1992), 249-286.

[T-00] Jacques Tits, Groupes de rang un et ensembles de Moufang, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France* (2000), 93-109.

[TW-03] Jacques Tits et Richard M. Weiss, *Moufang Polygons*, Springer monographs in Math. (2003).

[W-03] Richard M. Weiss, *The structure of spherical buildings*, (Princeton U. Press, Princeton, 2003).

[W-09] Richard M. Weiss, *The structure of affine buildings*, Annals of math. studies **168** (Princeton U. Press, Princeton, 2009).

[Wolf] *Wolf prizes in mathematics*, volume 2, S.S. Chern et F. Hirzebruch éditeurs (World Sci. Publ., 2001).

Guy Rousseau, Institut Élie Cartan, UMR 7502 Nancy Université, CNRS, INRIA , BP 70239 , F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex • *E-mail :* `rousseau@iecn.u-nancy.fr`